TS 2 . 2006/2007. Lycée A. Daudet. Corrigé du contrôle n°5 bis . Samedi 10/02/07.

Exercice 1 . Similitudes. *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal* $(O;\vec{u},\vec{v})$ ***d'unité graphique 2 cm*** *.*

Partie A :

On désigne par m un nombre ***réel.*** *On considère la transformation* T_m *du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :* $z' = (m+i)z + m - 1 - i$ *.*

a) Donnez la définition d'une similitude plane et montrez que T_m *en est une.*
Déterminez son rapport en fonction de m.

Une similitude plane est une transformation qui multiplie les distances par un rapport k > 0.
Une transformation du plan est une application bijective du plan dans lui-même, c'est-à-dire que tout point du plan possède un antécédent unique par cette application.

Vérifions(ce n'était pas indispensable puisque l'énoncé affirmait que Tm était une transformation) que tout **point M' d'affixe z' possède un unique antécédent M d'affixe** z :

$z' = (m+i)z + m - 1 - i \Leftrightarrow z' - (m-1-i) = (m+i)z \Leftrightarrow z = \dfrac{z' - (m-1-i)}{m+i}$, car m est réel donc $m + i \neq 0$

Pour tout z', il existe un unique z tel que z' = $T_m(z)$. T_m est bien une transformation plane.

Montrons que T_m multiplie les distances par un rapport $k > 0$.

$M'N' = |z'_N - z'_M| = |(m+i)z_N + m - 1 - i - ((m+i)z_M + m - 1 - i)| = |(m+i)||z_N - z_M| = \sqrt{m^2+1}|z_N - z_M| = \sqrt{m^2+1}\,MN$

T_m est donc une similitude plane de rapport $k = \sqrt{m^2+1} > 0$.

b) Peut-on choisir m de telle sorte que T_m *soit une translation ?*

L'écriture complexe d'une translation est de la forme $z' = z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$.

Pour que T_m soit une translation , il faudrait que m + i = 1 c'est-à-dire m = 1 – i .
Ceci est impossible car m est un réel. T_m ne peut pas être une translation.

c) Déterminez le réel m de telle sorte que T_m *soit une rotation. Précisez alors le centre et l'angle de cette rotation.*

Une rotation conserve les distances, c'est donc une similitude de rapport k = 1.
Pour que T_m soit une rotation, il faut donc que $\sqrt{m^2+1} = 1$, or $\sqrt{m^2+1} = 1 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{m = 0}$.
Dans ce cas, T_0 s'écrit z'= iz – 1 – i c'est-à-dire z' – (– i) = i(z – (– i))

$= e^{i\frac{\pi}{2}}$ (z – (– i)).

Il apparaît ainsi que T_0 est une rotation de centre A d'affixe (– i) et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice , on pose m = 1 et on note simplement T la transformation T_1 **.**
1°) a) Calculez l'affixe du point Ω *invariant par T .*

T a pour écriture complexe : z' = (1 + i)z – i .
Ω , point invariant par T signifie : T (Ω) = Ω
L'affixe ω du point Ω vérifie donc ω = (1 + i) ω – i d'où i ω = i , donc ω = 1.

Ω est le point d'affixe 1.

b) Prouvez que T est la composée d'une homothétie et d'une rotation bien choisies.

Notons h l'homothétie de centre Ω , de rapport $\sqrt{2}$ et r la rotation de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{4}$ rad

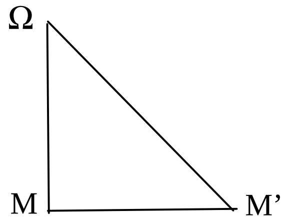
Déterminons l'écriture complexe de la composée $f = h \circ r$

$z \xrightarrow{r} z' \xrightarrow{h} z''$ avec $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1)+1$ et

$$z'' = \sqrt{2}(z'-1)+1 = \sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1)+1-1\right)+1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1)+1 = (1+i)(z-1)+1 = (1+i)z-i$$

Nous retrouvons l'écriture complexe de T : T = $h \circ r$

c) Montrez que , si M est distinct de Ω , alors le triangle Ω MM' est rectangle isocèle en M.



Le triangle Ω MM' est rectangle isocèle en M, équivaut à

MM' = MΩ et $\left(\overrightarrow{M\Omega};\overrightarrow{MM'}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. (*Sur la figure ci-contre ce serait* $-\frac{\pi}{2}$ …)

Calculons $\frac{z'-z}{\omega-z} = \frac{(1+i)z-i-z}{1-z} = \frac{iz-i}{1-z} = \frac{-i(1-z)}{1-z} = -i$

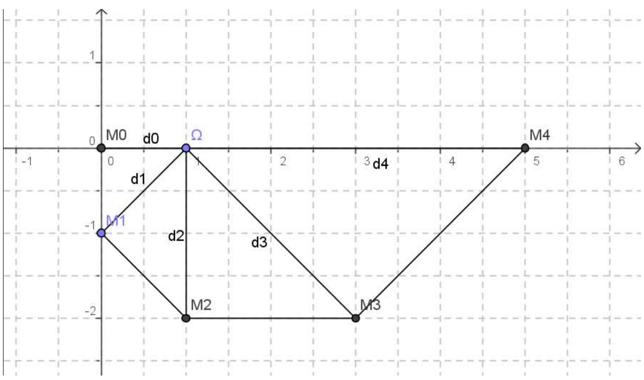
Nous utilisons ensuite, classiquement , module et argument :

- $\left|\frac{z'-z}{\omega-z}\right| = \frac{|z'-z|}{|\omega-z|} = |-i| = 1 = \frac{\text{MM'}}{\text{M}\Omega}$, donc MM' = MΩ
- $\arg\left(\frac{z'-z}{\omega-z}\right) = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] = \left(\overrightarrow{M\Omega};\overrightarrow{MM'}\right)$

Le triangle Ω MM' est bien rectangle isocèle en M.

2°) On définit dans le plan une suite de points (M_n) en posant M_0 = O , M_1 = T(M_0) ,…., et , pour tout entier naturel non nul , M_n = T(M_{n-1})

a) Construire les points M_1 , M_2 , M_3 , et M_4 .



b) Pour tout entier n , on pose d_n = ΩM_n. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Déterminez sa limite.

T est une similitude de rapport $\sqrt{2}$,les distances sont donc multipliées par $\sqrt{2}$.

Pour tout n, entier naturel ,

T(Ω)T(M_n)= $\sqrt{2}$ ΩM_n

c'est-à-dire ΩM_{n+1}= $\sqrt{2}$ ΩM_n

ou encore d_{n+1} = $\sqrt{2}$ d_n

(d_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} > 1$.

Cette suite a donc pour limite + ∞

Exercice 2. Probabilités.

Un laboratoire a mis au point un éthylotest. Théoriquement , celui-ci devrait être positif lorsqu'une personne testée a un taux d'alcoolémie excessif (c'est à dire strictement supérieur au seuil toléré).

Mais il n'est pas parfait. :

◆À un taux d'alcoolémie excessif, l'éthylotest est positif 96 fois sur cent.

◆À un taux d'alcoolémie acceptable, l'éthylotest est positif 3 fois sur cent.

On suppose que ces résultats portent sur un échantillon suffisamment important pour qu'ils soient constants.

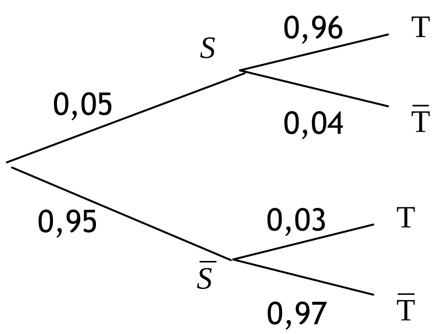
Dans une région, 95 % des conducteurs d'automobiles ont un taux d'alcoolémie acceptable.

On soumet au hasard un automobiliste de cette région à l'éthylotest.

On définit les événements suivants :

T : « L'éthylotest est positif » *S : « Le conducteur a un taux d'alcoolémie excessif »*

1°) Faire un arbre pondéré traduisant les données numériques de l'énoncé.



Traduction des données :

$p_S(T) = 0{,}96$; $p_{\overline{S}}(T) = 0{,}03$; $p(\overline{S}) = 0{,}95$

2°) Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ait un taux d'alcoolémie excessif et que l'éthylotest soit positif.

$p(S \cap T) = p(S) \times p_S(T) = (1 - p(\overline{S})) \times p_S(T) = 0{,}05 \times 0{,}96 = \boxed{0{,}048}$.

3°) Calculez P(T)

Utilisons la formule des probabilités totales , S et $\overline{S}$ formant une partition de l'univers :

$$p(T) = p(T \cap S) + p(T \cap \overline{S})$$

Donc : $p(T) = p(S) \times p_S(T) + p(\overline{S}) \times p_{\overline{S}}(T) = 0{,}048 + 0{,}95 \times 0{,}03 = \boxed{0{,}0765}$

4°) Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait un taux d'alcoolémie excessif si l'éthylotest est positif ?

$$p_T(S) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}048}{0{,}0765} = \boxed{\frac{32}{51} \approx 0{,}63}$$

5°) Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait un taux d'alcoolémie acceptable si l'éthylotest est négatif?

$$p_{\overline{T}}(\overline{S}) = \frac{p(\overline{S} \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \frac{0{,}95 \times 0{,}97}{1 - 0{,}0765} = \frac{0{,}9215}{0{,}9235} \approx 0{,}998.$$

6°) Quelle est la probabilité que l'éthylotest donne un résultat erroné ?

Notons E l'évènement « L'éthylotest donne un résultat erroné »

$p(E) = p(T \cap \overline{S}) + p(\overline{T} \cap S) = 0{,}95 \times 0{,}03 + 0{,}05 \times 0{,}04 = 0{,}0305.$

Dans environ 3% des cas l'éthylotest donne un résultat erroné.

Exercice 3 : Suites numériques

Partie A :

On considère les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ *et* $(q_n)_{n\geq 0}$ *définies conjointement par :* $p_0 = q_0 = 1$, $p_{n+1} = p_n + q_n$ *pour* $n \geq 0$, $q_{n+1} = p_n + 2q_n$ *pour* $n \geq 0$

1°)Calculer p_1, q_1, p_2, q_2, p_3 *et* q_3.

1. On trouve $p_1 = p_0 + q_0 = 2$ $q_1 = p_0 + 2q_0 = 3$ $p_2 = 5$ $q_2 = 8$ $p_3 = 13$ et $q_3 = 21$

2°)a)Montrer que : Pour tout $n \geq 0$ *on a :* $p_n > 0$ *et* $q_n > 0$.

On fait un raisonnement par récurrence :

La proposition *P(n)* est : $p_n > 0$ *et* $q_n > 0$ ☺ il faut gérer les deux à la fois

Initialisation : Pour *n* = 0, $p_0 = q_0 = 1 > 0$ *P(0)est vraie*

Hérédité : *P(n)* vraie entraine - t -elle *P(n+1)* vraie ?

supposons que $p_n > 0$ et $q_n > 0$ et démontrons que $p_{n+1} > 0$ et $q_{n+1} > 0$.

On a $p_{n+1} = p_n + q_n$ donc $p_{n+1} > 0$ (somme de deux positifs) et $q_{n+1} = p_n + 2q_n$ (somme de deux positifs)

donc $q_{n+1} > 0$. La propriété *P(n+1)* *est* donc vraie .

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence la proposition est vraie pour tout n . Pour tout entier naturel *n*, $p_n > 0$ *et* $q_n > 0$

2°)b) Montrer que : Pour tout $n \geq 1$ on a : $q_n > p_n$.

La récurrence n'est pas indispensable , mais on pouvait en faire une.

Pour $n \geq 0$ on a $q_{n+1} - p_{n+1} = q_n$ or $q_n > 0$ (cf 2a) donc $q_{n+1} > p_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$

Ce qui équivaut à : Pour tout $n \geq 1$ on a : $q_n > p_n$..

2°)c) Montrer que : Pour tout $n \geq 1$ *on a:* $p_n \geq 2n$.

On fait un raisonnement par récurrence

Initialisation : Pour *n* = 1, $p_1 = 2 \geq 2$ *P(1)est vraie*

Hérédité : *P(n)* vraie entraine - t -elle *P(n+1)* vraie ?

supposons que $p_n \geq 2n$ et démontrons que $p_{n+1} \geq 2(n+1)$.

Puisque $p_{n+1} = p_n + q_n$ alors $p_{n+1} > p_n + p_n$ car $q_n > p_n$, donc $p_{n+1} \geq 2n + 2n \geq 2n + 2$ (car $n \geq 1$ implique $2n \geq 2$) : La propriété *P(n+1)* *est* donc vraie

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$ on a: $p_n \geq 2n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Puisque $q_n > p_n \geq 2n$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2n = +\infty$ il en résulte, en utilisant les théorèmes de comparaison, que $\lim\limits_{x\to+\infty} p_n = \lim\limits_{x\to+\infty} q_n = +\infty$.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *définie pour tout* $n \geq 0$ *par* $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$. *1°)Calculer* u_0, u_1, u_2 *et* u_3.

1. On trouve $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{2}{3}$ $u_2 = \frac{5}{8}$ et $u_3 = \frac{13}{21}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a : $u_n > 0$.

☺ Inutile de se compliquer la vie !!

Puisque $p_n > 0$ et $q_n > 0$ $u_n = \frac{p_n}{q_n} > 0$ (quotient de deux nombres strictement positifs).

3. Vérifier que pour tout $n \geq 0$ on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f et la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Pour $n \geq 0$, on a $u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + q_n}{p_n + 2q_n} = \frac{\frac{p_n}{q_n}+1}{\frac{p_n}{q_n}+2} = \frac{u_n+1}{u_n+2}$ (en divisant par $q_n > 0$) donc $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et en déduire, éventuellement à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

On trouve $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ On conjecture à l'aide des premiers termes que la suite est décroissante .

Démontons par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, On a $u_1 = \frac{2}{3} \leq 1 = u_0$ donc *P(0)est vraie*

Hérédité : *P(n)* vraie entraine - t -elle *P(n+1)* vraie ?

supposons que $u_{n+1} \leq u_n$ et démontrons que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

f étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, $u_{n+1} \leq u_n$ implique $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ soit $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

La propriété *P(n+1)* *est* donc vraie

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence la proposition est vraie pour tout $n \geq 0$

donc ***(u_n) est décroissante***.

💣 💣 fonction et suite n'ont pas forcément le même comportement.

5. Justifier que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

(u_n) converge ***car c'est une suite décroissante et minorée par 0***. On sait de plus que sa limite vérifie $L \geq 0$

6. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

d'après le cours , f étant continue sur $[0 ; +\infty[$: L est une solution de l'équation $x = f(x)$

donc $L = \frac{L+1}{L+2}$ d'où $L^2 + 2L = L + 1$ soit :

$L^2 + L - 1 = 0$ on résout cette équation du second degré , on trouve deux racines et la seule convenant est la racine positive $L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 4: Arithmétique :

1. On considère l'équation (E) : 109x − 226y = 1 où x et y sont des entiers relatifs.
a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

109 est un nombre premier et 226 n'est pas un multiple de 109 donc pgcd(109 ; 226) = 1.
L'équation diophantienne (E) admet donc des couples solutions entiers.
Dans le cas où l'on n'aurait pas remarqué de 109 est un nombre premier, on met en œuvre l'algorithme d'Euclide sur les entiers $a = 226$ et $b = 109$ .On effectue les divisions euclidiennes successives :

$226 = 2 \times 109 + 8$

$109 = 13 \times 8 + 5$

$8 = 1 \times 5 + 3$

$5 = 1 \times 3 + 2$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$ donc **pgcd(226, 109) = 1**.

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme (141+226k, 68+109k), où k appartient à $\mathbb{Z}$.
En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que 109d = 1+226e. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

On peut présenter la rédaction de plusieurs façons dans la mesure où les solutions sont données.
Par exemple :

➷ On vérifie que les couples de la forme $(141 + 226k, 68 + 109k)$ sont bien des solutions de (E) :

$109 \times (141 + 226k) - 226 \times (68 + 109k) = 109 \times 141 - 226 \times 68 = 1$

➷Montrons ensuite, que ce sont les seuls.

Notons (x, y) un couple solution quelconque (Il y en a d'après la question 1.a).
On écrit le système :

$$\begin{cases} 109x - 226y = 1 \\ 109 \times 141 - 226 \times 68 = 1 \end{cases}$$

En retranchant membre à membre :
$109(x - 141) - 226(y - 68) = 0$

$109(x - 141) = 226(y - 68)$ (♣)

On en déduit que 226 divise le produit $109(x - 141)$. Mais, par ailleurs, pgcd(226, 109) = 1.
Donc d'après le théorème de Gauss, 226 divise $x - 141$.
Il existe donc un entier relatif k tel que $x - 141 = 226k$ c'est-à-dire $x = 141 + 226k$.

En remplaçant dans la relation (♣), nous obtenons :

$109 \times 226k = 226(y - 68)$ d'où $109k = y - 68$ c'est-à-dire $y = 68 + 109k$.

Les couples d'entiers (x, y) solutions de l'équation diophantienne $109x - 226y = 1$ sont de la forme $(x, y) = (141 + 226k, 68 + 109k)$ où k est élément de $\mathbb{Z}$.

Recherchons la valeur d de $x = 141 + 226k$ telle que :

$0 < d \leqslant 226 \iff 0 < 141 + 226k \leqslant 226 \iff -141 < 226k \leqslant 85 \iff -\dfrac{141}{226} < k \leqslant \dfrac{85}{226}$.

Et comme k est un entier, la seule possibilité est : $k = 0$.
D'où : $d = 141$.
Et lorsque k vaut 0, la valeur e de y est alors égale à 68.
Ainsi, on a bien :
$109d = 1 + 226e$ avec d inférieur ou égal à 226.

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

Un entier naturel est premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.
Pour savoir si un nombre « assez grand » n est premier, on teste si ce nombre est divisible par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

On teste si 227 est divisible par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{227}$:

227 est-il divisible par	2	3	5	7	11	13
	non	*non*	*non*	*non*	*non*	*non*

Donc 227 est premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.
On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} *par 227 ;*
à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} *par 227.*
a. Vérifier que g[f(0)] = 0.

$f(0)$ est le reste de la division euclidienne de 0^{109} par 227 donc : $f(0) = 0$.
On a donc $g[f(0)] = g(0)$. Or $g(0)$ est le reste de la division euclidienne de 0^{141} par 227 donc : $g(0) = 0$.
Finalement : $g[f(0)] = 0$.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1\ [227]$.

Soit a un élément non nul de A (A est l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et 226).
Donc l'entier a n'est pas divisible par 227.
Comme 227 est premier (d'après la question 2), d'après le petit théorème de Fermat, on a : $a^{226} \equiv 1\ [227]$
Ceci étant valable pour tout élément non nul a de A.

c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, g[f(a)] = a. Que peut-on dire de f[(g (a)] = a ?

Soit a non nul . On a, modulo 227 :
$g[f(a)] \equiv (f(a))^{141} \equiv a^{109\times141}$ [227].
Mais d'après la question 1.b., on sait que $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$.
D'où : $g(f(a)) \equiv a^{109\times141} \equiv a\, a^{226\times68}$ [227].
Et d'après la question 3.b. on sait que $a^{226} \equiv 1$ [227] donc :
$g[f(a)] \equiv a$ [227]. D'où : $g[f(a)] = a$ puisque a appartient à A

Les fonctions f et g commutent ; en effet, pour tout entier a :
$f[g(a)] \equiv (g(a))^{109} \equiv a^{109\times141} \equiv g[f(a)]$ [227].
On a donc également, pour tout entier a non nul de A : $f[g(a)] = a$.